

# Zur Verteilung der Protonen in schweren Atomkernen

Von P. MITTELSTAEDT

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. 10a, 379—383 [1955]; eingegangen am 14. März 1955)

Durch eine konsequente Anwendung des Thomas-Fermischen Potentialmodells wird gezeigt, daß bei schweren Kernen die von den Kernkräften herrührenden Kollektivpotentiale für Protonen und Neutronen verschieden angenommen werden müssen. In Weiterführung der Gedanken von Johnson und Teller wird mit Hilfe dieser Potentiale die Dichteverteilung der Protonen berechnet. Der Radius  $R^{(P)}$  dieser Verteilung ergibt sich in befriedigender Übereinstimmung mit neueren Experimenten zu  $R^{(P)} = 1,26 \cdot A^{1/3} \cdot 10^{-13}$  cm.

Neuere Arbeiten, die den Einfang von  $\mu$ -Mesonen, sowie die Streuung von Elektronen an verschiedenen Atomkernen betreffen<sup>1</sup>, scheinen ergeben zu haben<sup>2</sup>, daß die Verteilung der Protonen innerhalb des Kerns einen kleineren Radius hat als die der Neutronen. Für den Radius der Protonenverteilung wird dabei der ungefähre Wert

$$R^{(P)} = 1,2 A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

angegeben, während der entsprechende Radius  $R^{(N)} = 1,4 A^{1/3} \cdot 10^{-13}$  cm betragen soll.

Diese Ergebnisse stehen im Widerspruch zu der bisher üblichen Ansicht, nach der die Protonen infolge ihrer gegenseitigen Abstoßung am Kernrand stärker konzentriert sind als in seinem Inneren.

Um dieser Schwierigkeit zu entgehen, wurde von Johnson und Teller mit Hilfe des statistischen Modells der Versuch gemacht<sup>3</sup>, die beobachtete engere Verteilung der Protonen als einen bisher unberücksichtigten Oberflächeneffekt bei schweren  $\beta$ -stabilen Kernen zu deuten. Dem von den Kernkräften herrührenden kollektiven Potential, das unabhängig von der Teilchensorte auf ein Nukleon wirkt, soll sich nach dieser Auffassung im Falle der Protonen das langsam veränderliche Coulombsche Abstoßungspotential überlagern (s. Abb. 1). Die  $\beta$ -Stabilität der betrachteten Kerne bedeutet, daß der höchste angefüllte Protonenzustand dieselbe Energie hat wie der höchste angefüllte Neutronenzustand. (Von den vorhandenen, aber geringfügigen Unterschieden soll hier abgesehen werden.) Im Falle eines allmählich nach außen abfallenden Kernkraftpotentials bedeutet daher die Addition

des Coulomb-Potentials näherungsweise eine Parallelverschiebung, so daß der „Radius“ des gesamten Protonenpotentials kleiner ausfällt als der des Neutronenpotentials. Eine entsprechende Beziehung wird daher zwischen den Dichteverteilungen der Protonen und Neutronen bestehen.

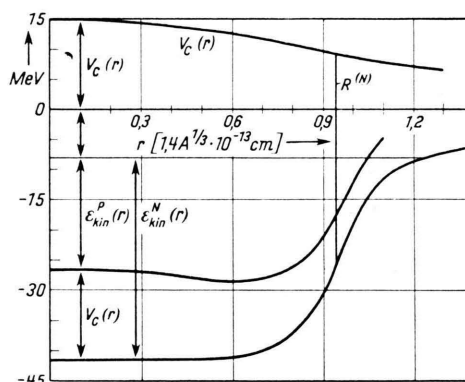


Abb. 1. Potentialbild von  $^{207}_{82}\text{Pb}$  bei  $\alpha=1$  ( $Z=55$ ).

Die konsequente Durchführung dieses Gedankens zerstört jedoch zunächst die innere Konsistenz des Thomas-Fermischen Potentialbildes insofern, als das auf diese Weise konstruierte Protonenpotential bereits mit einer Teilchenzahl voll aufgefüllt ist, die weit unterhalb des wirklichen Wertes von  $Z$  liegt (vgl. Abb. 4). Daraus scheint zu folgen, daß die Annahme, das Protonenpotential stimme, soweit es von den Kernkräften herrührt, mit dem Neutronenpotential überein, sich nicht aufrechterhalten läßt. Inwieweit sich eine solche

<sup>1</sup> E. M. Lyman, A. O. Hanson u. M. B. Scott, Phys. Rev. **84**, 626 [1951]. — L. N. Cooper u. E. M. Henley, Bull. Amer. Phys. Soc. **28**, 56 [1953]. — R. W. Pidd, C. I. Hammer u. E. C. Raka, Phys. Rev. **92**,

436 [1954]. — R. Hofstadter, H. R. Fechter u. I. A. McIntyre, Phys. Rev. **92**, 978 [1954].

<sup>2</sup> L. I. Schiff, Phys. Rev. **92**, 988 [1954].

<sup>3</sup> M. H. Johnson u. E. Teller, Phys. Rev. **93**, 357 [1954].



Verschiedenheit der Potentiale aus der Struktur der Kernkräfte verstehen läßt, soll im Rahmen des statistischen Modells in § 1 genauer diskutiert werden. Der Zusammenhang dieser Potentialdifferenz mit dem in der Weizsäcker-Bethe-Formel auftretenden Neutronenüberschußglied  $(N-Z)^2/(N+Z)^2$  ist kürzlich von Wildermuth<sup>4</sup> untersucht worden.

Die Annahme von zwei verschiedenen Kernkraftpotentialen für Protonen und Neutronen ermöglicht eine widerspruchsfreie Durchführung des statistischen Modells und führt dann zu dem Ergebnis, daß der Radius der Protonenverteilung entsprechend den experimentellen Resultaten kleiner ist als der der Neutronen. Der Radiusbegriff soll dabei mit Hilfe des mittleren quadratischen Radius definiert werden. Als Beispiel werden die Dichte- und Potentialverteilungen des Kerns  $^{207}_{82}\text{Pb}$  genauer berechnet werden.

### 1. Allgemeines

Die in der Einleitung ausgesprochene Vermutung, daß das kollektive Kernkraftpotential für Protonen und Neutronen verschieden sei, soll zunächst im Rahmen des statistischen Modells näher begründet werden. Dabei wird sich ergeben, daß auch bei Annahme einer ladungsunabhängigen Anziehungskraft zwischen den Nukleonen die den Austauschenergien entsprechenden Potentialterme wegen der bei schweren Kernen gültigen Beziehung  $N \neq Z$  ungleiche Beiträge zu den Potentialen der Protonen und Neutronen liefern.

Sind  $\varrho_P(r)$  bzw.  $\varrho_N(r)$  die auf  $Z$  bzw.  $N$  normierten Dichteverteilungen der Protonen bzw. Neutronen und ist  $E = \int \mathcal{E}(\varrho_P, \varrho_N) dr$  die Gesamtenergie des Kernes, so werden die Dichten in der statistischen Theorie durch die Gleichungen

$$\delta(E + \lambda_P Z) = 0, \quad \delta(E + \lambda_N N) = 0 \quad (1)$$

bestimmt.  $\lambda_P$  und  $\lambda_N$  sind hierbei Lagrangesche Multiplikatoren, die die Normierung der Funktionen  $\varrho_P(r)$  und  $\varrho_N(r)$  gewährleisten.

<sup>4</sup> K. Wildermuth, Z. Naturforschg. **9a**, 1047 [1954].

<sup>5</sup>  $\varrho_P(1,2)$  und  $\varrho_N(1,2)$  sind die gemischten Dichten der Protonen bzw. Neutronen, die sich aus den Einteilchenwellenfunktionen  $\psi_\nu(r)$  durch Summation über alle besetzten Zustände, also

$\varrho_P(1,2) = \sum \psi_\nu(1) \psi_\nu^*(2)$ ,  $\varrho_N(1,2) = \sum \psi_\nu(1) \psi_\nu^*(2)$  berechnen lassen.

Wählt man für die Kernkräfte eine Mischung der verschiedenen Austauschkräfte (Wigner, Majorana, Bartlett, Heisenberg) und ein nur ortsabhängiges Potential  $I(r_1, r_2)$ , so erhält man für die potentielle Energie der Kernkräfte einen Ausdruck der Form<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} = & a \iint [\varrho_P(1) \varrho_P(2) + \varrho_N(1) \varrho_N(2)] I(1,2) dr_1 dr_2 \\ & + b \iint \varrho_P(1) I(1,2) \varrho_N(2) dr_1 dr_2 \\ & + c \iint [|\varrho_P(1,2)|^2 + |\varrho_N(1,2)|^2] I(1,2) dr_1 dr_2 \\ & + d \iint \varrho_P(1,2) I(1,2) \varrho_N(2,1) dr_1 dr_2; \end{aligned}$$

$a, b, c$  und  $d$  sind dabei Konstanten, die von dem Mischungsverhältnis der verschiedenen Austauschkräfte abhängen<sup>6</sup>. Um die diesem Energieausdruck entsprechenden Potentialausdrücke zu erhalten, untersuchen wir die Variationen nach  $\varrho_P(r)$  und  $\varrho_N(r)$ . Für die ersten beiden Energieanteile erhält man damit

$$\delta E_{\text{pot}}^{(1)} = \int \Phi_P^{(1)}(r) \delta \varrho_P dr,$$

$$\Phi_P^{(1)}(r) = \int (2a \varrho_P(r') + b \varrho_N(r')) I(r, r') dr',$$

$$\delta E_{\text{pot}}^{(1)} = \int \Phi_N^{(1)}(r) \delta \varrho_N dr,$$

$$\Phi_N^{(1)}(r) = \int (2a \varrho_N(r') + b \varrho_P(r')) I(r, r') dr',$$

also wegen der verschiedenen Teilchenzahlen zwei verschiedene Potentialausdrücke für Protonen und Neutronen. Die beiden verbleibenden Glieder der potentiellen Energie gestatten im Rahmen der statistischen Theorie eine Vereinfachung. Verwenden wir nämlich für die  $\psi_\nu(r)$  ebene Wellen, so ist

$$\varrho_P(r_1, r_2) = \frac{2}{h^3} \int_0^{P_P} dp \exp \left[ \frac{i}{h} p (r_1 - r_2) \right],$$

wobei  $P_P$  bzw.  $P_N$  der Grenzpuls der Protonen bzw. Neutronen ist. Mit

$$\begin{aligned} f(\varrho_P, \varrho_N) = & \frac{4a}{h^6} \int d\tilde{s} \int_0^{P_N} dp_N \int_0^{P_P} dp_P I(|\tilde{s}|) \\ & \cdot \exp \left[ \frac{i}{h} (p_N - p_P) \tilde{s} \right] \quad (|\tilde{s}| = |r_1 - r_2|) \end{aligned}$$

erhält man für die Energie  $E_{\text{pot}}^{(2)}$ :

$$E_{\text{pot}}^{(2)} = c \int (f(\varrho_N, \varrho_N) + f(\varrho_P, \varrho_P)) dr + d \iint f(\varrho_P, \varrho_N) dr.$$

<sup>6</sup> Die Konstanten sind von Volz<sup>7</sup> berechnet worden unter der Annahme gemischter Austauschkräfte. Sind  $W, M, B$  und  $H$  die Anteile der (Wigner, Majorana, Bartlett, Heisenberg)-Kraft, so ist

$a = (-\frac{1}{4}M + \frac{1}{2}W - \frac{1}{2}H + \frac{1}{4}B)$ ,  $b = (W + \frac{1}{2}B)$ ,  
 $c = (\frac{1}{2}M - \frac{1}{4}W + \frac{1}{4}H - \frac{1}{2}B)$ ,  $d = (M + \frac{1}{2}H)$ .

<sup>7</sup> H. Volz, Z. Phys. **105**, 537 [1937].

Die Potentiale, die  $E_{\text{pot}}^{(1)}$  und  $E_{\text{pot}}^{(2)}$  entsprechen, sind daher

$$\begin{aligned}\Phi_P(r) &= \Phi_P^{(1)}(r) + c \frac{d}{d \varrho_P} f(\varrho_P, \varrho_P) + d \frac{\partial}{\partial \varrho_P} f(\varrho_P, \varrho_N), \\ \Phi_N(r) &= \Phi_N^{(1)}(r) + c \frac{d}{d \varrho_N} f(\varrho_N, \varrho_N) + d \frac{\partial}{\partial \varrho_N} f(\varrho_P, \varrho_N).\end{aligned}$$

Die Potentiale  $\Phi_P(r)$  und  $\Phi_N(r)$  werden wegen der Verschiedenheit der Teilchenzahlen und der dadurch bedingten Verschiedenheit der Dichten  $\varrho_P$  und  $\varrho_N$  nicht gleich sein und dadurch eine Verschiedenheit der kollektiven Kernkraftpotentiale bewirken, wie es oben schon aus anderen Gründen vermutet wurde<sup>8</sup>.

Berechnet man den der Gl. (1) entsprechenden vollständigen Variationsausdruck für die Energie, und versteht man unter  $\varepsilon_{\text{kin}}^P(r)$  bzw.  $\varepsilon_{\text{kin}}^N(r)$  die kinetische Grenzenergie der Protonen bzw. Neutronen an der Stelle  $r$ , und unter  $V_c(r)$  das klassische Coulomb-Potential der Protonen<sup>9</sup>, so erhält man die beiden Gleichungen<sup>10</sup>

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(r) + \Phi_P(r) + \varepsilon_{\text{kin}}^P(r) + V_c(r) + \lambda_P &= 0, \\ \mathcal{D}(r) + \Phi_N(r) + \varepsilon_{\text{kin}}^N(r) + \lambda_N &= 0.\end{aligned}$$

$\lambda_P$  und  $\lambda_N$  bedeuten hier die Abtrennarbeit eines Protons bzw. Neutrons aus dem Kern. Wegen der  $\beta$ -Stabilität wollen wir, wie in § 1 erwähnt,

$$\lambda_P = \lambda_N = V_0$$

setzen. Da es wegen der Unsicherheit in der Kenntnis von  $I$  (1,2) schwer möglich ist,  $\Phi_P(r)$  und  $\Phi_N(r)$  zu berechnen, wollen wir in einer halbempirischen Weise die Potentiale

$$V_P(r) = \Phi(r) + \Phi_P(r) \quad \text{und} \quad V_N(r) = \Phi(r) + \Phi_N(r)$$

als phänomenologische Kollektivpotentiale ansetzen und sie erst später aus den experimentellen Daten mit Hilfe der beiden Gln. (2) bestimmen<sup>11</sup>.

$$\begin{aligned}V_N(r) + \varepsilon_{\text{kin}}^N(r) + V_0 &= 0 \\ V_P(r) + \varepsilon_{\text{kin}}^P(r) + V_c(r) + V_0 &= 0.\end{aligned}\quad (2)$$

<sup>8</sup> Im Zusammenhang mit Fragen der Absättigung ist diskutiert worden statt des Energieausdruckes  $E_{\text{pot}}^{(1)}$  von einer nichtlinearen Potentialgleichung, etwa

$$\Delta \Phi - \mu^2 \Phi - \lambda \Phi^2 = -g(\varrho_P + \varrho_N)$$

auszugehen und als Energie die entsprechende Hamilton-Funktion zu verwenden:

$$E_{\text{pot}} = \int \left[ \frac{1}{2} (\Delta \Phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \Phi^4 - g \Phi (\varrho_P + \varrho_N) \right] d\mathbf{r}.$$

Im Rahmen der hier durchgeführten Überlegungen würde die Verwendung dieses Ausdruckes keine wesentlichen Änderungen hervorrufen, denn bei Variation der Energie

$$\delta E_{\text{pot}} = -g \int \Phi \delta \varrho_P d\mathbf{r}$$

Hieraus folgt

$$V_A(r) + V_c(r) = \varepsilon_{\text{kin}}^N(r) - \varepsilon_{\text{kin}}^P(r),$$

wenn die Differenz  $V_P - V_N$  mit  $V_A(r)$  bezeichnet wird. Um für dieses Differenzpotential einen physikalisch sinnvollen und leicht zu berechnenden Ansatz zu machen, nehmen wir an, daß die Potentiale durch einen Zahlenfaktor  $\alpha$  miteinander verbunden sind, und zwar soll

$$\begin{aligned}V_P(r) &= \alpha (V_N(r) + V_0) - V_0 \quad \text{für } r \leq r_0, \\ V_P(r) &= V_N(r) \quad \text{für } r > r_0\end{aligned}\quad (3)$$

gelten.

Die Größe  $r_0$  soll dadurch definiert werden, daß für  $r = r_0$  die Dichte der Neutronen  $\varrho_N(r)$  verschwindet. Wegen (2) und (3) gilt dann

$$V_A(r) = (1 - \alpha) \varepsilon_{\text{kin}}^N(r). \quad (4)$$

Berücksichtigt man weiterhin, daß im Thomas-Fermi-Modell die Dichte der Protonen bzw. Neutronen mit den entsprechenden kinetischen Grenzenergien durch die Relationen

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{kin}}^N(r) &= \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} \varrho_N^{2/3}(r), \\ \varepsilon_{\text{kin}}^P(r) &= \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} \varrho_P^{2/3}(r)\end{aligned}\quad (5)$$

verbunden sind, so folgt aus (2), (3) und (5)

$$\varrho_P(r) = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} [\alpha \varepsilon_{\text{kin}}^N(r) - V_c(r)]^{3/2}. \quad (6)$$

Da das Coulomb-Potential seinerseits wegen

$$V_c(r) = e^2 \int \frac{\varrho_P(r')}{|r - r'|} d\mathbf{r}' \quad (7)$$

durch die Protonendichte gegeben ist, erhält man aus (6) und (7) für  $\varrho_P(r)$  die nichtlineare Integralgleichung erster Ordnung

$$\varrho_P(r) = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \cdot \left[ \alpha \varepsilon_{\text{kin}}^N(r) - e^2 \int \frac{\varrho_P(r')}{|r - r'|} d\mathbf{r}' \right]^{3/2}.$$

erhält man als nichtlineares Potential  $\Phi(r)$  einen Ausdruck, der gleich ist für Protonen und Neutronen.

<sup>9</sup> Die der Coulomb-Energie entsprechende Austauschenergie soll hier nicht berücksichtigt werden, da sie gegenüber  $V_c(r)$ , wie Dirac gezeigt hat, bei den als groß angenommenen Teilchenzahlen vernachlässigt werden kann.

<sup>10</sup>  $\Phi(r)$  soll hier diejenigen Potentialanteile darstellen, die für Protonen und Neutronen gleich sind und etwa herrühren von einer nichtlinearen Potentialgleichung des oben angeführten Typs.

<sup>11</sup> Wir wollen im folgenden alle Dichte- und Potentialverteilungen als kugelsymmetrisch ansehen, so daß nurmehr eine Variable  $r$  auftritt.

Dabei wird die Verteilung der Neutronen als bekannt vorausgesetzt. Der bisher noch unbestimmte Parameter  $\alpha$  soll so festgelegt werden, daß die Normierungsbedingung

$$4\pi \int_0^{\infty} \varrho_P(r) r^2 dr = Z \quad (9)$$

für die Protonendichte erfüllt ist.

Um einen geeigneten Ansatz für  $\varepsilon_{\text{kin}}^N(r)$  zu finden, wollen wir für die Neutronendichte den Ansatz

$$\varrho_N(r) = \varrho_{N0} \cdot \exp[-(r/R_N)^n] \quad (10)$$

machen und für den Zahlenparameter  $n$  die Beziehung  $n = 1,57 A^{1/3}$  verwenden, die sich in einer früheren Arbeit<sup>12</sup> aus der Variation der Gesamtenergie nach der Dichte ergeben hatte. Die Werte  $\varrho_{N0}$  und  $R_N$  sollen durch die Normierungsbedingung

$$4\pi \int_0^{\infty} \varrho_N(r) r^2 dr = N \quad (11)$$

und durch die Vorgabe des mittleren quadratischen Radius festgelegt werden. Definiert man als Radius der Dichteverteilung

$$R^{(N)} = \sqrt{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{4\pi}{N} \int_0^{\infty} \varrho_N(r) r^4 dr},$$

so ergibt sich wegen (10)

$$R_N = \sqrt{\frac{\Gamma(1+3/n)}{\Gamma(1+5/n)}} \cdot R^{(N)}.$$

Diese Definition wird nahegelegt durch die Tatsache, daß die Streumessungen mit Elektronen unmittelbar Aussagen über den mittleren quadratischen Radius liefern, so daß also der Radius der Protonenverteilung

$$R^{(P)} = \sqrt{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{4\pi}{Z} \int_0^{\infty} \varrho_P(r) r^4 dr}$$

direkt mit dem Experiment verglichen werden kann. Die Übertragung dieses Radiusbegriffes auf die Neutronenverteilung ist wegen der ungenügenden Kenntnis der Kernkräfte und der damit verbundenen Unsicherheit in der Deutung der Neutronenstreuxperimente nicht ohne weiteres zu rechtfertigen<sup>13</sup>. Wir werden jedoch für die folgenden Rechnungen stets  $R^{(N)}$  durch<sup>14</sup>

$$R^{(N)} = 1,32 A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (12)$$

vorgeben, es sollen aber zum Vergleich zwei weitere mögliche Radiusdefinitionen mit angegeben werden (der Wendepunkt der Dichteverteilung; die Größe  $R_N$ ).

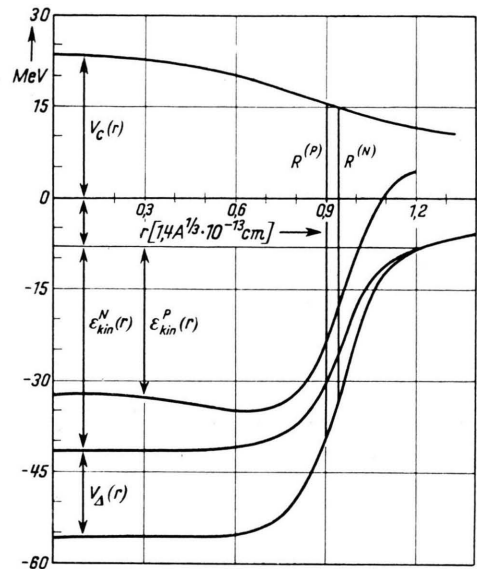


Abb. 2. Potentialbild von  $^{207}_{82}\text{Pb}$  bei  $\alpha = 1,425$  ( $Z = 82$ ).

## 2. Ergebnisse

Um numerische Aussagen über den Protonenradius  $R^{(P)}$  machen zu können, wurde speziell der Kern  $^{207}_{82}\text{Pb}$  näher untersucht, über den auch Streumessungen mit Elektronen vorliegen. Die Neutronendichte wurde entsprechend den Gln. (11) und

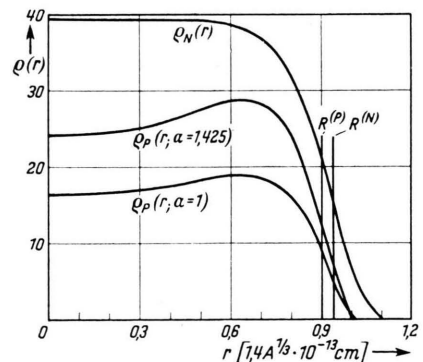


Abb. 3. Dichteverteilungen. Neutronen:  $\varrho_N(r)$ ; Protonen bei  $\alpha = 1$ :  $\varrho_P(r; \alpha = 1)$ ; Protonen bei  $\alpha = 1,425$ :  $\varrho_P(r; \alpha = 1,425)$ .

<sup>12</sup> P. Mittelstaedt, Z. Phys. **137**, 545 [1954].

<sup>13</sup> Eine genaue Diskussion dieser Frage wird bei Wildermuth<sup>4</sup> durchgeführt.

<sup>14</sup> Der Zahlwert für  $R^{(N)}$  ist hierbei den Tabellen von Blatt-Weisskopf<sup>15</sup> für das Element Pb entnommen, das hier genauer diskutiert werden soll.

<sup>15</sup> Blatt-Weisskopf, Theor. Nucl. Phys. S. 13, 14.



(12) gewählt, jedoch im Vergleich zu dem Ansatz (10) insofern modifiziert, als die asymptotisch abfallende Verteilungsfunktion  $\varrho_N(r)$  unter Beachtung der beiden Bedingungen (11) und (12) an der Stelle  $r=1,308 R^{(N)}$  in geeigneter Weise abgeschnitten wurde (s. Abb. 3). Während  $R^{(N)}$  durch (12) bestimmt ist, erhält man für die Stelle des Wendepunktes  $R_w$  den Wert  $R_w=0,991 R^{(N)}$  und für die Stelle  $R_N$ , an der die Dichte auf den  $\epsilon$ -ten Teil abgefallen ist,  $R_N=1,003 R^{(N)}$  (s. Tab. 1).

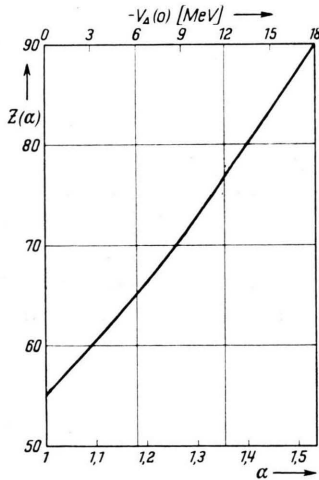
$R^{(N)} = 7,8078 \cdot 10^{-13} \text{ cm} = 1,32 A^{1/3} 10^{-13} \text{ cm}$
$R_w = 7,736 \cdot 10^{-13} \text{ cm} = 1,308 A^{1/3} 10^{-13} \text{ cm}$
$R_N = 7,835 \cdot 10^{-13} \text{ cm} = 1,325 A^{1/3} 10^{-13} \text{ cm}$
$R^{(P)} = 7,4863 \cdot 10^{-13} \text{ cm} = 1,265 A^{1/3} 10^{-13} \text{ cm}$

Tab. 1.

Die Lösung der Integralgl. (8) wurde für verschiedene Werte des Parameters  $\alpha$  bestimmt, wobei die jeweilige Lösung  $\varrho_P(\alpha; r)$  numerisch berechnet wurde. Der Zusammenhang der Protonenzahl

$$Z(\alpha) = 4\pi \int_0^\infty \varrho_P(\alpha; r) r^2 dr$$

mit dem Parameter  $\alpha$  bzw. mit dem Differenzpotential  $V_A(r)$  ist in Abb. 4 graphisch dargestellt.


 Abb. 4. Zusammenhang zwischen  $Z$  und  $\alpha$ .

Die richtige Normierung der Funktion  $\varrho_P(\alpha; r)$  auf  $Z=82$  wurde dabei mit  $\alpha=1,425$  erreicht. Die Potentialkurven, die sich aus dieser Lösung ergeben, sind in Abb. 2 graphisch dargestellt. Die numerischen Werte seien hier der Kürze wegen nur für  $r=0$  angegeben (Tab. 2).

$\epsilon_{\text{kin}}^P(0) = 24,23 \text{ MeV}$	$V_N(0) = -41,54 \text{ MeV}$	$V_A(0) = -14,25 \text{ MeV}$
$\epsilon_{\text{kin}}^N(0) = 33,54 \text{ MeV}$	$V_P(0) = -55,79 \text{ MeV}$	$V_C(0) = 23,56 \text{ MeV}$

Tab. 2.

Für  $V_0$  wurde auf Grund zahlreicher früherer Untersuchungen der Wert  $V_0=8 \text{ MeV}$  gewählt.

Die Dichtefunktion der Protonen ist gemeinsam mit der Dichtefunktion der Neutronen in Abb. 3 dargestellt. Für den Radius der Protonen erhält man

$$\begin{aligned} R^{(P)} &= 0,956 R^{(N)} = 7,486 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \\ &= 1,265 A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ cm}, \end{aligned}$$

also in Übereinstimmung zu den Messungen einen um  $0,3215 \cdot 10^{-13} \text{ cm} = 0,06 A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  kleineren Radius als für die Neutronen. Eine größere Differenz der Radien, wie sie den oft angegebenen Werten von  $R^{(P)}=1,2 A^{1/3}$  und  $R^{(N)}=1,4 A^{1/3}$  entspricht, ließe sich im Rahmen dieses Modells etwa dadurch erreichen, daß man von einer weniger steil abfallenden Dichteverteilung für die Neutronen ausginge, also den hier verwandten Parameter  $n$  etwas kleiner annähme.

Die Berechnungen am Kern  $^{207}_{82}\text{Pb}$  führen also zu folgendem Ergebnis: Die wirkliche Teilchenzahl der Protonen und Neutronen kann nur dadurch erhalten werden, daß man verschiedene Kernkraftpotentiale für beide Teilchensorten fordert. Bei Vorgabe des mittleren quadratischen Radius für die Neutronen durch  $R^{(N)}=1,32 A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  erhält man für die Protonen eine Dichteverteilung, deren Radius  $R^{(P)}$  um  $0,06 A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  kleiner ist als der der Neutronenverteilung. Es muß jedoch noch offen gelassen werden, ob die Definition des Radius  $R^{(N)}$  mit den experimentellen Untersuchungen in Übereinstimmung zu bringen ist. Allerdings ist aus Tab. 1 ersichtlich, daß die verschiedenen hier vorgeschlagenen Radiusdefinitionen sich quantitativ nur sehr unwesentlich voneinander unterscheiden, so daß die gewonnenen Ergebnisse auch bei Verwendung eines dieser Radiusbegriffe qualitativ dieselben bleiben dürften.

Herrn Prof. W. Heisenberg und Herrn Dr. G. Lüders möchte ich für zahlreiche wertvolle Hinweise und Diskussionen vielmals danken. Herrn Prof. L. Biermann danke ich für die Erlaubnis, die Göttinger elektronische Rechenmaschine G1 für die numerischen Rechnungen benutzen zu dürfen. Weiterhin möchte ich Herrn Dr. E. Freese vielmals danken, der gemeinsam mit dem Verfasser zahlreiche unveröffentlichte Rechnungen, die das behandelte Problem betreffen, durchgeführt hat.